Лекция №7

2.5. Смешанный процесс авторегрессии – скользящего среднего (процесс авторегрессии с остатками в виде скользящего среднего)

ARMA(p,q):

$$X_t = a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + ... + a_pX_{t-p} + \epsilon_t + b_1\epsilon_{t-1} + ... + b_q\epsilon_{t-q}, \qquad a_p \neq 0, \;\; b_q \neq 0, \;\; \epsilon_t - \textit{белый шум} \tag{1}$$

Процесс X_t с нулевым математическим ожиданием, принадлежащий такому классу процессов, характеризуется порядками p и q его AR и MA составляющих и обозначается как процесс **ARMA(p, q) (autoregressive moving average, mixed autoregressive moving average)**. Более точно, процесс X_t с нулевым математическим ожиданием принадлежит классу $ARMA(p,q)$, если:

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_jX_{t-j} + \sum_{j=0}^{q} b_j\epsilon_{t-j}, \qquad a_p \neq 0, \;\; b_q \neq 0, \;\; \mathbb{E}\,X_t = 0 \tag{2}$$

где ϵ_t – процесс белого шума и $b_0 = 1$. В операторной форме последнее соотношение имеет вид

$$a(L) = 1 - (a_1L + a_2L^2 + ... + a_pL^p) \tag{3}$$

$$b(L) = 1 + b_1L + b_2L^2 + ... + b_qL^q \tag{4}$$

$$a(L)X_t = b(L)\epsilon_t, \tag{5}$$

т.е. $a(L)$ и $b(L)$ имеют тот же вид, что и в определенных ранее моделях $AR(p)$ и $MA(q)$. Если процесс имеет постоянное математическое ожидание μ , то он является процессом типа $ARMA(p,q)$, если

$$X_t - \mu = \sum_{j=1}^{p} a_j(X_{t-j} - \mu) + \sum_{j=0}^{q} b_j\epsilon_{t-j} \qquad (\mathbb{E}\,X_t = \mu \neq 0) \tag{6}$$

Отметим следующие свойства процесса $ARMA(p,q)$ в широком смылсе с $\mathbb{E}(X_t) = \mu$.

- Процесс <u>стационарен</u>, если все корни уравнения $a(z) = 0$ лежат вне единичного круга $|z| \leq 1$
- Если процесс стационарен, то существует эквивалентный ему процесс $MA(\infty)$

$$X_t - \mu = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\epsilon_{t-j}, \qquad c_0 = 1, \;\; \sum_{j-0}^{\infty} |c_j| < \infty \tag{7}$$

  или

$$X_t - \mu = c(L)\epsilon_t, \qquad \textit{где} \qquad c(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_jz^j = \frac{b(z)}{a(z)} \tag{8}$$

- Если все корни уравнения $b(z) = 0$ лежат вне единичного круга $|z| \leq 1$ **(условие обратимости)**, то существует эквивалентное представление процесса X_t в виде процесса авторегрессии бесконечного порядка $AR(\infty)$

$$X_t - \mu = \sum_{j=1}^{\infty} d_j (X_{t-j} - \mu) + \epsilon_t, \tag{9}$$

или

$$d(L)(X_t - \mu) = \epsilon_t, \qquad \text{\textit{где}} \qquad d(z) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} d_j z^j = \frac{a(z)}{b(z)} \tag{10}$$

Отсюда вытекает, что стационарный процесс $ARMA(p,q)$ всегда можно аппроксимировать процессом скользящего среднего достаточно высокого порядка, а при выполнении условия обратимости его можно также аппроксимировать процессом авторегрессии достаточно высокого порядка.

Специфику формы коррелограммы процесса $ARMA(p,q)$ в общем случае указать труднее, чем для моделей $AR(p)$ и $MA(q)$. Отметим только, что для значений $k > q$ коррелограмма процесса $a(L)X_t = b(L)\epsilon_t$ выглядит так же, как и коррелограмма процесса авторегрессии $a(L)X_t = \epsilon_t$. Так, для процесса $AR(1)$:

$$\rho(k) = a^k, \qquad k = 0, 1, 2, ... \tag{11}$$

Для процесса $ARMA(1,1)$:

$$\rho(k) = a_1 \rho(k-1) \qquad k = 2, 3, ... \tag{12}$$

как и у процесса $X_t = a_1 X_{t-1} + \epsilon_t$. При этом, однако, $\rho(1) \neq a_1$.

Предпосылкой для обоснования использования моделей $ARMA$ является следующий факт. Если $ARMA(p_1, q_1)$ ряд X_t и $ARMA(p_2, q_2)$ ряд Y_t статистически независимы между собой, и $Z_t = X_t + Y_t$, то типичным является положение, когда Z_t является $ARMA(p,q)$ рядом, у которого:

$$p = p_1 + p_2, \tag{13}$$

$$q = p_1 + q_2, \qquad p_1 + q_2 > p_2 + q_1 \tag{14}$$

$$q = p_2 + q_1, \qquad p_2 + q_1 > p_1 + q_2 \tag{15}$$

Возможны также ситуации, когда значения p и q оказываются меньше указанных значений. (Такие ситуации возникают в случаях, когда многочлены $a_X(z)$ и $a_Y(z)$, соответствующие авторегрессионным частям процессов X_t и Y_t , имеют общие корни.)

В частном случае, когда оба ряда имеют тип $AR(1)$, но с различными параметрами, их сумма имеет тип $ARMA(2,1)$.

$$X_t \sim AR(1), Y_t \sim AR(1) \Rightarrow z_t = X_t + Y_t \sim ARMA(1,1) \tag{16}$$

В экономике многие временные ряды являются агрегированными. Из указанного выше факта вытекает, что если каждая из компонент отвечает простой модели AR, то при независимости этих компонент их сумма будет $ARMA$ процессом. Такого же рода процесс мы получим, если часть компонент имеет тип AR, а остальные компоненты имеют тип MA. Единственным исключением является случай, когда все компоненты являются MA процессами – в этом случае в результате получаем MA процесс.

Предположим, наконец, что “истинный” экономический ряд отвечает $AR(p)$ модели, но значения этого ряда измеряются со случайными ошибками, образующими процесс белого шума (т.е. $MA(0)$). Тогда наблюдаемый ряд имеет тип $ARMA(p,p)$.

$$X_t \sim AR(p), Y_t \sim AR(0) \Rightarrow z_t = X_t + Y_t \sim ARMA(p,p) \tag{17}$$

Замечание

$$\sum AR \to ARMA \tag{18}$$

$$\sum AR + \sum MA \to ARMA \tag{19}$$

$$\sum MA \to MA \tag{20}$$

Ранее мы уже говорили о том, что если $ARMA(p,q)$ процесс X_t удовлетворяет условию обратимости, то его можно представить в виде стационарного процесса $AR(\infty)$. Последний, в свою очередь, можно аппроксимировать стационарным процессом $AR(p)$, быть может, достаточно высокого порядка.

Таким образом, в практических задачах можно было бы и вовсе обойтись без использования моделей $ARMA$, ограничиваясь либо AR либо MA моделями. При этом, однако, количество коэффициентов, подлежащих оцениванию, может оказаться слишком большим (что снижает точность оценивания) и даже превосходить количество имеющихся наблюдений. В этом смысле модели $ARMA$ могут быть “**более экономными**”.

2.6. Модели ARMA, учитывающие наличие сезонности

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j} + \sum_{j=0}^{q} b_j \epsilon_{t-j}, \qquad \textit{где} \quad b_0 = 1, a_p \neq 0, b_q \neq 0, \epsilon_1 - \textit{белый шум} \tag{21}$$

Если наблюдаемый временной ряд обладает выраженной сезонностью, то модель $ARMA$, соответствующая этому ряду, должна содержать составляющие, обеспечивающие проявление сезонности в порождаемой этой моделью последовательности наблюдений. Для квартальных данных чисто сезонными являются стационарные модели ***сезонной авторегрессии первого порядка (SAR(1))***.

$$X_t = a_4 X_{t-4} + \epsilon_t, \qquad a_4 < 1 \tag{22}$$

и ***сезонного скользящего среднего первого порядка (SMA(1))***.

$$X_t = \epsilon_t b_4 \epsilon_{t-4}. \tag{23}$$

В первой модели автокорреляционные функции:

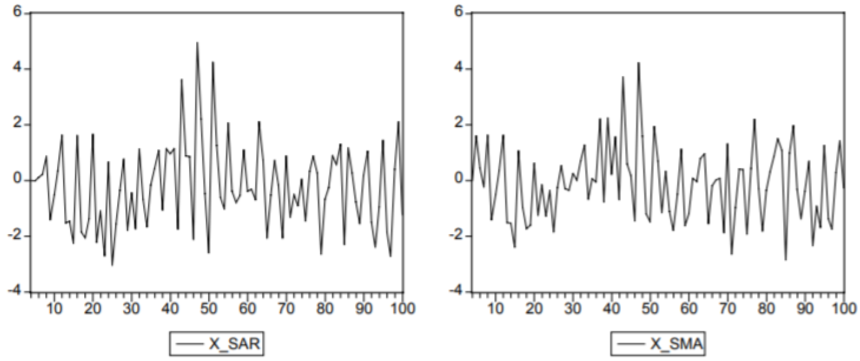
$$\rho(k) = a_4^{k/4}, \qquad \textit{для} \quad k = 4m, m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

$$\rho(k) = 0 \qquad \textit{для остальных} \quad k > 0. \tag{25}$$

Во второй модели

$$\rho(0) = 1, \quad \rho(4) = b_4, \quad \rho(k) = 0 \quad \textit{для остальных} \quad k > 0. \tag{26}$$

Ниже приведены смоделированные реализации модели SAR(1) с $a_4 = 0.8$ и модели SMA(1) с $b_4 = 0.8$.



Комбинации несезонных и сезонных изменений реализуются, например, в моделях $ARMA((1,4),1)$ и $ARMA(1,(1,4))$. Такие модели носят название аддитивных сезонных моделей.

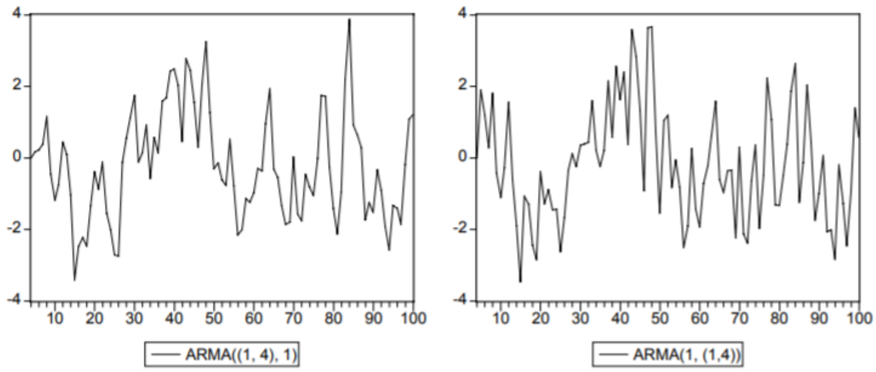
$ARMA((1,4),1)$

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_4 X_{t-4} + \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1} \tag{27}$$

$ARMA(1,(1,4))$

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1} + b_4 \epsilon_{t-4}. \tag{28}$$

Следующие два графика показывают поведение смоделированных реализаций таких рядов при $a_1 = 2/3$, $a_4 = \check{}1/48$, $b_4 = 1/5$ у первого ряда и при $a_1 = 0.4$, $b_1 = 0.3$, $b_4 = 0.8$ у второго ряда. Таким образом можно так подобрать коэф-ты моделей, что эти реализации будут очень близки.



Заметим, что для первой модели уравнение $a(z) = 0$ принимает вид $1 - 2/3z + 1/48z^4 = 0$, т.е. $z^4 - 32z + 48 = 0$; корни этого уравнения $z_1 = 2$, $z_2 = 2$, $z_3 = -2 + i\sqrt{8}$, $z_4 = -2 - i\sqrt{8}$ лежат вне единичного круга, что обеспечивает стационарность рассматриваемого процесса. Во второй модели $a(z) = 0$ принимает вид $1 - 0.4, z = 0$; корень этого уравнения $z = 2.5 > 1$, так что и эта модель стационарна.

Кроме рассмотренных примеров аддитивных сезонных моделей, употребляются также и мультипликативные спецификации, например,

$$(1 - a_1 L)X_t = (1 + b_1 L)(1 + b_4 L_4)\epsilon_t, \tag{29}$$

$$(1 - a_1 L)(1 - a_4 L^4)X_t = (1 + b_1 L)\epsilon_t. \tag{30}$$

Первая дает

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1} + b_4 \epsilon_{t-4} + b_1 b_4 \epsilon_{t-5}, \tag{31}$$

а вторая

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_4 X_{t-4} - a_1 a_4 X_{t-5} + \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1} \tag{32}$$

В первой модели допускается взаимодействие составляющих скользящего среднего на лагах 1 и 4 (т.е. значений ϵ_{t-1} и ϵ_{t-4}), а во второй – взаимодействие авторегрессионных составляющих на лагах 1 и 4 (т.е. значений X_{t-1} и X_{t-4}). Конечно, эти две модели являются частными случаями аддитивных моделей

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1} + b_4 \epsilon_{t-4} + b_5 \epsilon_{t-5} \tag{33}$$

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_4 X_{t-4} - a_5 X_{t-5} + \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1} \tag{34}$$

с $b_5 = b_1 b_4$, $a_5 = -a_1 a_4$. При приближенном выполнении последних соотношений (по крайней мере, если гипотезы о наличии таких соотношений не отвергаются), естественно перейти от оценивания аддитивной модели к оцениванию мультипликативной модели, опять следуя ***принципу "экономности"*** модели ***("parsimony model")***. Впрочем, каких-либо теоретических оснований, ведущих к предпочтению одной формы сезонности перед другой (мультипликативной или аддитивной), не существует.

Замечание 7.1.3. Пусть X_t - процесс типа $ARMA(p,q)$, $a(L)X_t = b(L)\epsilon_t$. Выше отмечалось, что если все корни алгебраического уравнения $a(z) = 0$ лежат вне единичного круга $|z| \leq 1$ на комплексной плоскости, то X_t - стационарный процесс. Но такой процесс может быть стационарным и в случае, когда уравнение $a(z) = 0$ имеет корень z с $|z| = 1$. Поясним это следующим простым примером.

Пусть $X_t = X_{t-1}$:

$$X_t - X_{t-1} = \epsilon_t - \epsilon_{t-1}. \tag{35}$$

Последнее выражение записывается в виде:

$$(1 - L)X_t = (1 - L)\epsilon_t, \tag{36}$$

т.е. $a(L)X_t = b(L)\epsilon_t$, где $a(L) = 1 - L$ и $b(L) = 1 - L$. Иными словами, для процесса X_t получили $ARMA(1,1)$ представление

$$X_t = X_{t-1} + \epsilon_t - \epsilon_{t-1}, \tag{37}$$

для которого уравнение $a(z) = 0$ имеет корень $|z| = 1$.

Замечание 7.1.4. В общем случае, если у $ARMA(p,q)$ процесса X_t, $a(L)X_t = b(L)\epsilon_t$, многочлены $a(z)$ и $b(z)$ *не имеют общих корней*, условие нахождения всех корней уравнения $a(z) = 0$ вне единичного круга $|z| \leq 1$ является *необходимым и достаточным* для стационарности процесса X_t.

Замечание 7.1.5. Представить в виде процесса скользящего среднего бесконечного порядка можно не только стационарный процесс X_t типа $ARMA(p,q)$, но фактически и любой стационарный процесс, встречающийся на практике. Это вытекает из так называемого **разложения Вольда** (*Wold's decomposition*). Вольд в работе (*Wold*, 1938) показал, что любой стационарный в широком смысле процесс X, с нулевым математическим ожиданием может быть представлен в виде:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \epsilon_{t-j} + Z_t, \tag{38}$$

где $c_0 = 1$ и $\sum_{j=0}^{\infty} c_j^2 < \infty$, ϵ_t - процесс белого шума, Z_t - стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, $Cov(Z_t, \epsilon_{t-j}) = 0$ для всех j, и значение Z_t можно сколь угодно точно предсказать на основании линейной функции от прошлых значений процесса $X_t : X_{t-1}, X_{t-2}, ...$

Тем самым стационарный процесс X_t представляется в виде суммы двух компонент: **линейно недетерминированной** (*linearly indeterministic*) компоненты $\sum_{j=0}^{\infty} c_j \epsilon_{t-j}$ и **линейно детерминированной** (*linearly deterministic*) компоненты Z_t. Если вторая компонента в разложении Вольда отсутствует, т.е. $Z_t \equiv 0$, то процесс называется **чисто линейно недетерминированным** (*purely linearly indeterministic*).

Таким образом, если стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием является чисто линейно недетерминированным, то он представим в виде процесса скользящего среднего бесконечного порядка

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \epsilon_{t-j}, \qquad где \qquad c_0 = 1, \sum_{j=0}^{\infty} c_j^2 < \infty. \tag{39}$$

В качестве тривиального примера линейно детерминированного стационарного процесса с нулевым средним можно указать на модель случайного уровня:

$$X_t = X_0, \qquad t = 1, 2, ..., \tag{40}$$

где X_0 - случайная величина, имеющее нулевое математическое ожидание и конечную дисперсию.

В практических исследованиях обычно сразу предполагают отсутствие линейно детерминированной компоненты.